UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UN MODELO ESTADÍSTICO PARA PENSIONES

REPORTE DE LOS SEMINARIOS DE INVESTIGACIÓN I Y II

PARA OBTENER EL TÍTULO DE MATEMÁTICO

P R E S E N T A

BERENICE BECERRA ORTEGA

DIRECTOR DE SEMINARIO

DR. GABRIEL ESCARELA PÉREZ

IZTAPALAPA, D.F. JULIO DEL 2005

Introducción

En este trabajo se pretende llegar a crear un modelo que toma en cuenta la esperanza de vida, el tipo de trabajo y las aportaciones utilizando la ayuda de estadística, actuaría y algunos supuestos económicos de manera que estas tres áreas en conjunto lleguen a un modelo y dependiendo de esté definir cual es el momento indicado para que una persona se pensione y no solo dependa de una fecha ya fijada.
El servicio de seguros (pensiones) de cada país o compañía debe de ser capaz de asignar primas así como cuotas a aquellos que estén asegurados para cubrir las cantidades que habrá de pagar la compañía o el país -según sea el caso-, en los casos de muerte del asegurado, retiro por edad, retiro por accidente de trabajo entre otras. Normalmente los métodos disponibles para estimar las probabilidades relacionadas con las pensiones son calculadas por medio de tablas de vida estandarizadas, es decir toman una tabla para todos los individuos en general en un tiempo determinado.
El objetivo de esté trabajo es abordar el problema de las pensiones como ya se menciono anteriormente y llegar a un modelo matemático que sea aplicable a este problema en general.
Pero que es una pensión. Una pensión, es una prestación social otorgada mediante la asignación de una cantidad de dinero mensual o anual a un trabajador o a su familia, por un servicio prestado anteriormente.
Para abordar el problema de las pensiones es necesario que tengamos en cuenta que esta depende de varios factores (la edad, el tipo de trabajo, aportaciones), que son determinantes para poder deducir que tipo de pensión va a tener la persona. Por ejemplo, una persona que trabaja en una oficina es más probable que reciba una pensión por edad o por años de servicio, sin en cambio una persona que se dedica a la construcción (de edificios) su probabilidad de sufrir un accidente es mayor que de la persona que trabaja en una oficina por lo cual tiene mayor probabilidad de pensionarse por accidente de

trabajo o muerte. En este último caso entiéndase que la pensión la recibirá el trabajador o sus familiares según sea el caso.

En el Capítulo 1 se aborda el tema del estimador de máxima verosimilitud así como el procedimiento a seguir para obtenerlo, junto con una breve indagación sobre la información de Fisher.

En el Capítulo 2 se da una breve introducción a algunos términos actuariales que se utilizaran para el modelo a plantear, entre ellos esta tasa de interés, valor presente, salarios, entre otros.

En el Capítulo 3 vemos la función de supervivencia y la función de mortalidad así como algunas funciones de decremento múltiple -las que se consideran más importantes- y una breve explicación de el modelo de Larson y Dinse.

En el Capítulo 4 es donde se conjuntan los temas anteriores para llegar al modelo y se presentan las variables consideradas importantes para esté así como una breve explicación de su aplicación.

Capítulo 1

Estimador de máxima verosimilitud

1.1 Verosimilitud

El estadístico de verosimilitud para un modelo estadístico es definida por la misma fórmula de la densidad, pero los papeles de los datos x y el parámetro que se intercambian θ

$$L_x(\theta) = f_\theta(x)$$

De esta manera la función de verosimilitud es considerada una función de θ para datos fijos x, mientras que la densidad es considerada una función de x para θ fijo (pero los dos son la misma función)
La función de verosimilitud realmente es un concepto ligeramente más general

$$L_x(\theta) = v(x) f_\theta(x) \tag{1.1}$$

la verosimilitud para el modelo cuando $v(x)$ es cualquier función de valores estrictamente positivos de x que no contiene el parámetro θ. La razón para esta extensión de la noción es que todos los usos que nosotros hacemos de la función de verosimilitud no será afectada de forma alguna por la presencia o ausencia de $v(x)$. La manera de hacer uso de la definición extendida es extender las condiciones multiplicativas en términos de la densidad eso no contiene el parámetro.

1.2 Estimador de máxima verosimilitud

El método llamado máxima verosimilitud usado como un estimador del verdadero valor del parámetro desconocido, el punto $\hat{\theta}_x$ eso aumenta al máximo la probabilidad L_x. Este estimador se llama el estimador de máxima verosimilitud (MLE). Nosotros decimos "el método llamado" porque realmente no es un método, siendo más bien indefinido que es considerado un maximizador. La función de verosimilitud L_x no necesita tener un máximo, y aun cuando tiene, los máximos no necesitan ser únicos. El máximo obtenido no se sabe si es global o local se piensa. Normalmente se dice que es un máximo global aun cuando no se tenga esa información, pero la teoría dice que son máximos locales "buenos" pueden tener las propiedades similares al máximo global. De manera que no sólo son máximos globales difíciles de encontrar, incluso ni siquiera son deseables aquí.

Así que lo que generalmente se hace es empezar un algoritmo de optimización local bueno con un punto de partida "bueno" y tomar la solución producida por el algoritmo para ser el MLE (si el algoritmo converge a una solución). Técnicamente, lo que se requiere del punto de partida para ser "bueno" es que obedezca la ley de la raíz cuadrada: su error de estimación va a resultar cero como una constante dividida entre la raíz cuadrada del tamaño de la muestra. Generalmente, uno sólo usa el mejor estimador que uno puede calcular a partir del punto partida.

1.3 Información de Fisher esperada

Dado que la función log es monótona, el máximo de la función verosimilitud es igual al máximo de la función log verosimilitud.

$$l_x(\theta) = \log L_x(\theta) \tag{1.2}$$

Por muchas razones es más conveniente usar la función log verosimilitud en lugar de la función verosimilitud.

Las derivadas de la función log verosimilitud (1.2) es muy importante en la teoría de verosimilitud. Los momentos de la derivada de la función log verosimilitud satisfacen algúnas identidades importantes. Note que si a la función verosimilitud esta dada por (1.1), entonces la función log verosimilitud se da por

$$l_x(\theta) = \log v(x) + \log f_\theta(x) \tag{1.3}$$

y las derivadas con respecto a θ no involucran al término $\log h(x)$ dado que no contienen a θ. Para que estas derivadas estén bien definidas y el mismo sin tener en cuenta de que $h(x)$ se usa. Además notemos que el máximo de (1.3) no importa como se definió (máximo local o global)no depende de $h(x)$. De esta manera el MLE es el mismo (en caso de definirse) sin tener en cuenta qué $h(x)$ se uso.
Primero, la primera derivada su esperanza tiene que igualarse a cero

$$E_\theta\{\nabla l_x(\theta)\} = 0 \tag{1.4}$$

donde ∇f denota el vector de derivadas parciales de una función escalar f de una variable del vector, muchas veces llamada el gradiente de f, y $\nabla f(x)$ denotando el valor del gradiente en el punto x.
Segundo, la varianza de la primera derivada es menos la esperanza del segundo

$$var_\theta\{\nabla l_x(\theta)\} = -E_\theta\{\nabla^2 l_x(\theta)\} \tag{1.5}$$

dónde $\nabla^2 f$ denota la matriz de las segundas derivadas parciales de una función escalar f de una variable del vector, a menudo llamada el hessiano de f, y $\nabla^2 f(x)$ denota el valor del hessiano en el punto x.
Cualquier lado de la ecuación (1.5) se llama la información de Fisher esperada de (o sólo "información de Fisher" sin "esperada" cuando está claro lo que se significa) y se denota $I(\theta)$

1.4 Distribución asintótica de el MLE

La "muestra grande" o "asintótica" la aproximación de la distribución muestral de el MLE $\hat{\theta}_x$ es normal multivariada con esperanza θ (el verdadero valor del parámetro es desconocido) y la varianza es $I(\theta)^{-1}$. Notemos que en el caso del multiparametro $I(\theta)$ es una matriz así "la información de Fisher" involucra una matriz inversa.
Aquí se supone que $(x_1, \ldots, x_n)$ es un vector de variables independientes idénticamente distribuidas y la información del Fisher para el tamaño de la muestra n se denota $I_n(\theta)$, entonces satisface la identidad $I_n(\theta) = n \cdot I_1(\theta)$ Esto pasa porque la varianza de una suma es la suma de las varianzas cuando las variables son independientes.

1.5 Información de Fisher observada

En la práctica, es inútil que el MLE tiene varianza asintótica $I(\theta)^{-1}$ porque nosotros no conocemos θ. Si nosotros conociéramos θ, entonces no habria razones para estimarlo.
Aquí se aproxima la varianza asintótica por el valor estimado del parámetro, es decir, nosotros usamos $I(\hat{\theta}_x^{-1})$ como la varianza aproximada del MLE.
La teoría asintótica garantiza que la aproximación de $I(\theta)$ por $I(\hat{\theta}_x)$ produce un error que es despreciable comparado con la mejor aproximación de la distribución del MLE dado por la Normal $(\theta, I(\theta)^{-1})$. Esto es el mejor estimador estimado en $\hat{\theta}_x$ para θ
Hay un segunda forma de calcularlo. La segunda forma es calculando la segunda derivada de la información de Fisher $-E\{\nabla^2 l_x(\theta)\}$, estó por la ley de los grandes números que da una buena aproximación dada por la propia variable aleatoria. El cual esta dado por

$$J_x(\theta) = -\nabla^2 l_x(\theta)$$

la información de Fisher observada y usada como otra aproximación a la información de Fisher. Claro, que todavía no se conoce θ, se necesita un segundo estimador $J_x(\hat{\theta}_x)$ en lugar de $J_x(\theta)$. El principal estimador aplica aquí también. El error calculado por la aproximación $I(\theta)$ por $J_x(\hat{\theta}_x)$ es despreciable comparado al error que aproxima la distribución del MLE por la normal $(\theta, I(\theta)^{-1})$

Capítulo 2

Conceptos de teoría de interés

2.1 Tasa de interés efectiva

Una tasa de interés siempre se declara junto con una unidad básica de tiempo. Una tasa de interés se dice efectiva si el periodo conversión y la unidad de básica de tiempo son iguales; en este caso el interés es capitalizado al final de la unidad básica de tiempo.
El período de conversión tiene que ser declarado; éste es al final del intervalo de tiempo cuando el interés se acredita o capitaliza.
Sea i la tasa de interés anual efectiva y por simplicidad supongamos que es la misma para todos los años. Tomemos el capital inicial invertido, donde al finalizar k años se capitaliza una cantidad adicional r_k, para $k = 1, ..., n$. Sea F_k el equilibrio al término de k años, incluyendo el parámetro r_k. El interés capitalizado previo al año de balance es iG_{k-1} y a F_k lo podemos dar en términos de (G_{k-1}, r_k, i). Esto es

$$\begin{aligned} G_k &= G_{k-1} + iG_{k-1} + r_k, k = 1, ..., n \\ &= G_k - (i+1)G_{k-1} = r_k \end{aligned}$$

si multiplicamos la ecuación anterior por $(1 + i)^{n-k}$ y sumamos todos los valores de k, menos los dos términos que están de lado izquierdo de la ecuación que se restaran, obtenemos

$$G_n = (1+i)^n G_0 + \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k} r_k$$

El factor de descuento ésta dado por

$$v = \frac{1}{1+i} \tag{2.1}$$

2.2 Perpetuidades

Consideremos perpetuidades que consisten en un pago anual de una unidad. Si el primer pago ocurre al tiempo 0, la perpetuidad es llamada perpetuidad vencida y se denota por

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + ... = \frac{1}{1+v}$$

donde, $v = \frac{1}{1+i}$, llamado factor de descuento.
Si el primer pago es hecho al final del primer año, le llamamos a esta, perpetuidad inmediata, y es denotada por $a_{\overline{\infty}|}$ y esta dado por

$$\begin{aligned} a_{\overline{\infty}|} &= v + v^2 + v^3 + ... \\ &= \frac{v}{1+v} = \frac{1}{i} \end{aligned}$$

Consideremos perpetuidades donde pagamos la cantidad de $\frac{1}{m}$ y estos se hacen en m periodos de tiempo, en este caso, cada año. Si el pago se hace por adelantado, el valor presente se denota por $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}$ y esta dado por

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + ... = \frac{1}{m}\frac{1}{1-v^{1/m}}$$

Si los pagos son hechos con atraso (que el primer pago de $1/m$ se hace al tiempo $1/m$), el valor presente se denota por $a^{(m)}_{\overline{\infty}|}$ y esta dado por

$$\begin{aligned} a^{(m)}_{\overline{\infty}|} &= \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{3}{m}} + ... \\ &= \frac{1}{m}\frac{v^{1/m}}{1-v^{1/m}} \end{aligned}$$

Un cierto tipo de perpetuidades con pagos incrementados es definido por dos parámetros, m, el número de pagos por año y q, el número de incrementos por año, y por simplicidad asumiremos que q es factor de m, es decir $m = q*c$ con $m, q, c \in \aleph$, En general los pagos de una perpetuidad adelantada con incremento se define como sigue:

Tiempo	Pagos
0	$1/mq$
$1/q$	$2/mq$
$2/q$	$3/mq$
$3/q$	$4/mq$
n	$\frac{n+1}{mq}$

En particular, los últimos m/q pagos del k año son cada uno de k/m. Denotaremos el valor presente de cada perpetuidad como $(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{\infty|}} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty|}}\ddot{a}^{(q)}_{\overline{\infty|}}//$
Ahora bien, consideremos una perpetiuidad con pagos con anuales arbitrarios $r_0, r_1, r_2, ...$ en el tiempo $0, 1, 2$ donde el valor presente se denota por

$$\ddot{a} = r_0 + vr_1 + v^2r_2 + \dots$$

2.3 Valor acturial presente

El tiempo y la cantidad que se le pagué a un beneficiario solo depende del tiempo que este viva. El modelo será desarrollado con una *función de benefició*, b_x, y una *función de descuento*, v_x. En el modelo v_x es factor de descuento, es el mismo que el de la ecuación (2.1), donde x es el tiempo en que se realizan los pagos hasta que el beneficiario muere ($x \leq n$), n es número de pagos totales a realizar.
Se define la *función de valor presente* como:

$$z_x = b_x v_x \tag{2.2}$$

donde z_x es el valor presente, de la póliza emitida, los pagos. El tiempo transcurrido de la póliza a el tiempo donde muere el asegurado es el tiempo de vida futuro del asegurado dado por una variable aleatoria $X = X(t)$ definida en la sección de función de supervivencia.
Un plazo de seguro de vida de n años proporciona un solo pago si el asegurado muere al termino del año n del seguro comenzando en emisión. Si una unidad es pagable en el momento de muerte de (t), entonces

$$b_x = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

$$v_x = v^x \quad x \geq 0$$

$$z_X = \begin{cases} v^X & \text{si } X \leq n \\ 0 & \text{si } X > n \end{cases}$$

Puesto que el tiempo de vida futuro no es una variable negativa, son definidas b_x, v_x y z_x solo en valores positivas, se asume que la fuerza de interés es constante

La esperanza del valor presente de la variable aleatoria z_x , es llamada el valor actuarial presente de el seguro. El principal símbolo para el valor presente actuarial de un seguro rentable es A

El valor actuarial presente para el asegurado al término de n años con un solo pago al momento de la muerte de (t), $E[z_X]$, es denotado por $\bar{A}^1_{t:\overline{n}|}$. Esto puede ser calculado si ponemos a z_x en función de X. Para esto se usa la función distribución de X para obtener

$$\bar{A}^1_{t:\overline{n}|} = \mathrm{E}[z_X] = \int_0^\infty z_x f_X(x)dx = \int_0^n v^t_x p_t h_t(x)dx \tag{2.3}$$

Donde ${}_xp_t$ es

$${}_xp_t = \frac{s(t+x)}{s(t)}$$

El j-esimo momento de la distribucion z_X puede ser encondado apartir de

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(z_X)^j] &= \int_0^n (v^x)^j_x p_t h_t(x)dx & (2.4) \\ &= \int_0^n \exp\{-(\delta j)x\}_x p_t h_t(x)dx & (2.5) \end{aligned}$$

Donde la varianza, dados los momentos, esta dada por

$$\mathrm{Var}[z_t] = (\mathrm{E}[z_X])^2 \tag{2.6}$$

Ejemplo

Supongamos $X \sim$ Exponencial$(1 \setminus 10)$ y $\delta = 1$. El valor presente de \$1 pagadero en la muerte de asegurado es

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[z_X] &= \mathrm{E}[\exp\{-\delta * X\}] = \int_0^\infty \exp\{-\delta * x\}\lambda \exp\{-\lambda * x\}dx \\
&= \frac{\lambda}{\delta + \lambda} \\
&= \frac{0.10}{0.05 + 0.10} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

2.4 Valuación de planes de pensiones

2.4.1 Suposiciones demográficas

Una parte importante para evaluar los planes de pensiones es el decremento múltiple, muchas veces para esto se construye una tabla que representa a un grupo de personas que viven tras varios años de servicio activo, dado por la probabilidad de que

- Retiro por la edad.
- Muerte en servicio.
- Retiro por discapacidad.
- Retiro por años de servicio.

La notación para estas probabilidades para la edad x a la edad $x + 1$ es $q_x^{(w)}, q_x^{(d)}, q_x^{(i)}$ y $q_x^{(r)}$ respectivamente. Usaremos la notación $I_x^{(\tau)}$ para la función que representa al grupo de personas que viven tras varios años de servicio activo,(τ representa todos los destinos posibles) que satisface:

$$I_{x+1}^{(\tau)} = I_x^{(\tau)}[1 - (q_x^{(w)} + q_x^{(d)} + q_x^{(i)} + q_x^{(r)})] = I_x^{(\tau)} p_x^{(\tau)}$$

donde $I_x^{(\tau)}$ es el grupo de personas que viven x años hasta el tiempo de falla. Se asume que cada vida tiene una distribución de tiempo hasta la falla y causa de falla especifica por p.d.f.

$$f_{T,J}(t,j) = S_T(t)\mu_j(t)$$

Está función nos ayuda a para evaluar la expresión

$$_kp_x^{(\tau)} = \frac{I_{x+k}^{(\tau)}}{I_x^{(\tau)}}$$

Las fuerzas de decremento relacionadas a los años de servicio será continua para las edades.
Esto se ilustra como sigue:

2.4.2 Planes de pensiones y tasas de contribución

Algunos planes de pensiones definen las proporciones del ingreso de beneficio como una función del nivel de compensación cerca del momento de jubilación. En este caso es necesario estimar el salario futuro para evaluar los beneficios. Un buen estimador que cumple lo anterior, se definirá como sigue:

$(AS)_{x+h}$ es la tasa de salario anual actual a la edad $x+h$ para el trabajador que entro a las edad x y ahora tiene $x+h$

$(ES)_{x+h+t}$ es la tasa de salario anual estimado a la edad $x+h+t$

Se asumirá que la función del salario esta dado por SA_y que se usara para poder pronosticar el salario.

$$(ES)_{x+h+t} = (AS)_{x+h}\frac{SA_{x+t+h}}{SA_{x+h}}$$

Capítulo 3

Conceptos del análisis de supervivencia

3.1 Función de supervivencia

Sea $F(t)$ la función de distribución de T, donde T es variable aleatoria, que es la probabilidad que un recién nacido muera a la edad T.

$$F(t) = \Pr\{T \leq t\} = \int_0^t f(u)du \quad t \geq 0 \tag{3.1}$$

y sea

$$S(t) = 1 - F(t) = \Pr\{T > t\} \tag{3.2}$$

$S(t)$ es una función continua de t además de ser una función no creciente. Asumiremos que siempre se cumple $F(0) = 0$ lo cual implica que $S(0) = 1$, donde la función $S(t)$ es llamada función de supervivencia.
La función de supervivencia nos da la probabilidad de que un individuo sobreviva desde el tiempo de origen (en general no necesariamente es el momento del nacimiento como se dijo al principio) hasta un tiempo mayor que t o dicho en otras palabras que sobreviven al tiempo t.

Usando las leyes de probabilidad tenemos

$$\Pr\{t < T \leq z\} = F(z) - F(t) = S(t) - S(z) \quad \text{con} \quad t < z$$

3.1.1 Tiempo de muerte de una persona a la edad t

La probabilidad condicional de que una persona muera entre x y z años esta dada por

$$\Pr\{t < T \leq z \mid T > t\} = \frac{F(z) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{S(t) - S(z)}{S(t)}$$

Consideremos a una persona de edad t denotada, más específicamente por (t). El tiempo futuro de vida de (t), T-t, es denotado por X(t).

3.2 Fuerza de mortalidad

La fuerza de mortalidad se denota por $h(t)$, que es la probabilidad de que un individuo muera al tiempo t (se pensione al tiempo t), ya habiendo sobrevivido hasta ese tiempo.
La fuerza de mortalidad $h(t)$ representa la tasa instantánea de mortalidad para un individuo que sobrevive al tiempo t.
Dado esto tenemos

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Pr\{t \leq T < t + \Delta t | T \geq t\}}{\Delta t} \right] \tag{3.3}$$

Usando la función de distribución de T y la definición de probabilidad condicional, se puede demostrar que

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \right] \frac{1}{S(t)} \tag{3.4}$$

De aqui podemos ver que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \right] \tag{3.5}$$

es la definición de la derivada de $F(t)$con respecto a t, la cual es la función densidad $f(t)$ y por lo tanto se tiene que

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \tag{3.6}$$

además

$$h(t) = -\frac{d}{dt}\{\log S(t)\} \tag{3.7}$$

y entonces una expresión de la función de supervivencia en términos de la fuerza de mortalidad es

$$S(t) = \exp\{-H(t)\}$$

donde

$$H(t) = \int_0^t h(u)du$$

que es la fuerza de mortalidad integrada

La función $h(x)$ es una fuerza de mortalidad si y solo si satisface las siguientes propiedades:

a) $h(x) \geq 0, \forall x$

b) $\int_0^\infty h(x)dx = \infty$

Estas propiedades son necesarias dado que

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x)}{S(x)} \geq 0 & (3.8)\\ \int_0^\infty h(x)dx &= \int_0^\infty -\mathrm{d}[\log S(x)] & (3.9)\\ &= -\log S(x)|_0^\infty & (3.10)\\ &= \infty & (3.11) \end{aligned}$$

Estas propiedades son suficientes ya que la función de distribución resultante $F(x)$ es válida; en términos de la fuerza de mortalidad $h(x)$

$$F(-\infty) = F(0) = 1 - \exp\left\{-\int_0^\infty h(t)dt\right\} = 0$$

Tabla 3.1: Funciones de supervivencia y fuerza de mortalidad.

Nombre	$h(x)$	$S(x)$	Restricciones
Gompertz	Bc^x	$\exp\{-m(c^x-1)\}$	$B>0, c>1, x\geq 0$
Makeham	$A+Bc^x$	$\exp\{-Ax-m(c^x-1)\}$	$B>0, A\geq -B, c>1, x\geq 0$
Weibull	$kn(nx)^{k-1}$	$\exp\{-(nx)^k\}$	$k>0, n>0, x\geq 0$
Exponencial	n	$\exp^{-nx}$	$n>0, x\geq 0$
Log logistica	$\frac{kx^{k-1}n^k}{[1+(xn)^k]}$	$[1+(xn)^k]^{-1}$	$k>0, n>0, x\geq 0$

y

$$F(\infty) = 1 - \exp\left\{-\int_0^\infty h(t)dt\right\} = 1$$

3.3 Algunos modelos analíticos de mortalidad

En general se ha usado un modelo analítico para la función de supervivencia y fuerza de mortalidad. Ahora lo daremos algunas breves justificaciones de porque se usaron así. Una de ellas es que muchos fen ecuación menos de la física se explican eficientemente con formulas simples, así dando argumentos biológicos, algunos biólogos argumentan que la supervivencia humana esta dada igualmente por una sencilla ecuación que a su vez es más sencillo dar a conocer una ecuación con unos cuantos parámetros que explicar una tabla con demasiados parámetros, también tienen ciertas propiedades convenientes para ser evaluadas.
Ahora veremos algunas familias de funciones analíticas simples de la función fuerza de mortalidad y supervivencia.

En la tabla 3.3 se utiliza el término m, donde esté se define como:

$$m = \frac{B}{\log c}$$

Gompertz (1824) postulo que la fuerza de mortalidad crecía exponencialmente,

$$h_{x+t} = Bc^{x+t}, t > 0$$

que refleja bien el proceso de envejecimiento de el modelo de De Moivre y además elimina la suposición de una edad máxima.

El modelo de Gompertz fue generalizado por Makeham (1860), quien postulo lo siguiente,

$$h_{x+t} = A + Bc^{x+t}, t > 0$$

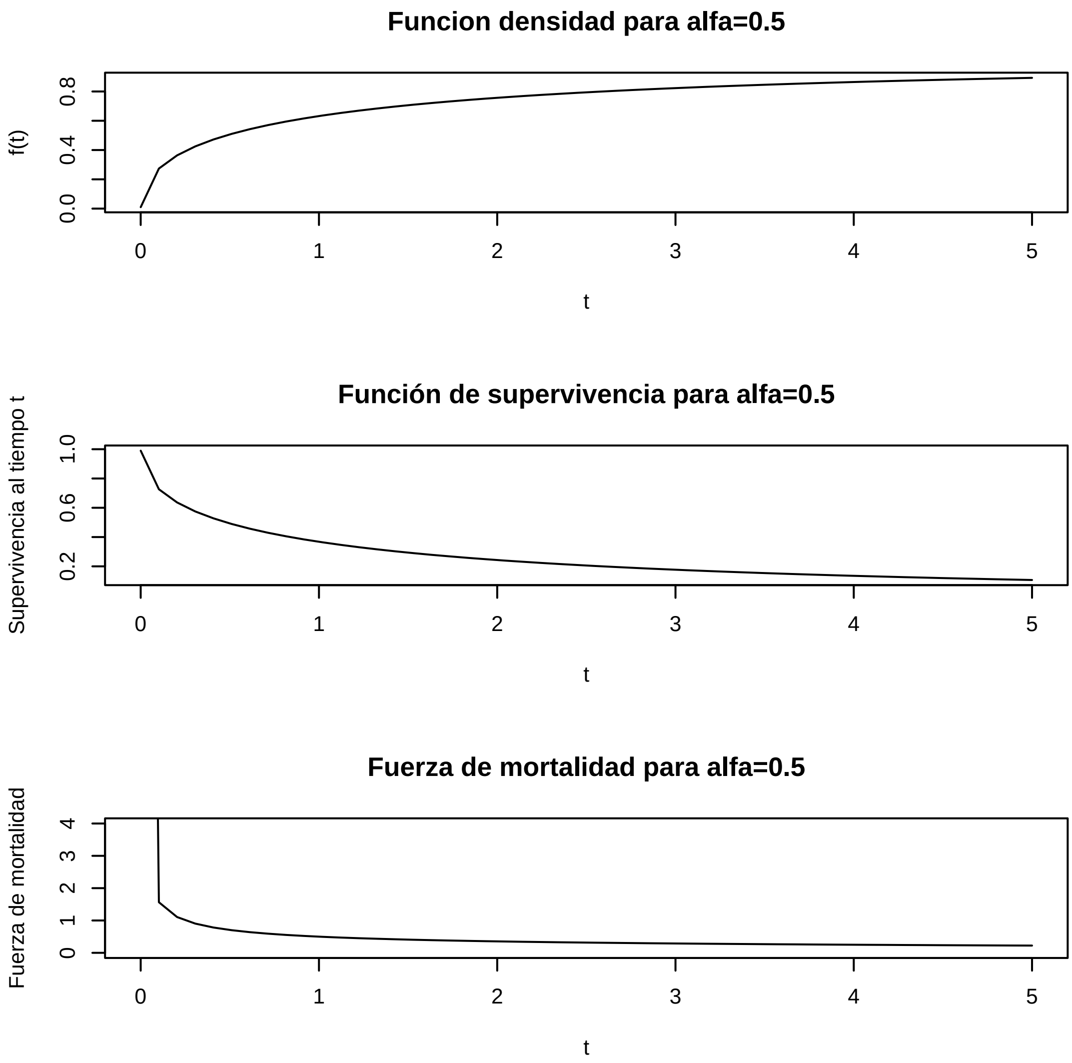
Como podemos ver el modelo de fuerza de mortalidad agrego la constante de edad como componente independiente, $A > 0$, a el crecimiento exponencial de la fuerza de mortalidad del modelo de Gompertz.
Un caso especial de los modelos de fuerza de mortalidad de Gompertz (c=1) y Makeham (B=0) nos da una fuerza de mortalidad constante.
Weibull (1939) sugirió que la fuerza de mortalidad crecía como potencia de t, en lugar de exponencialmente

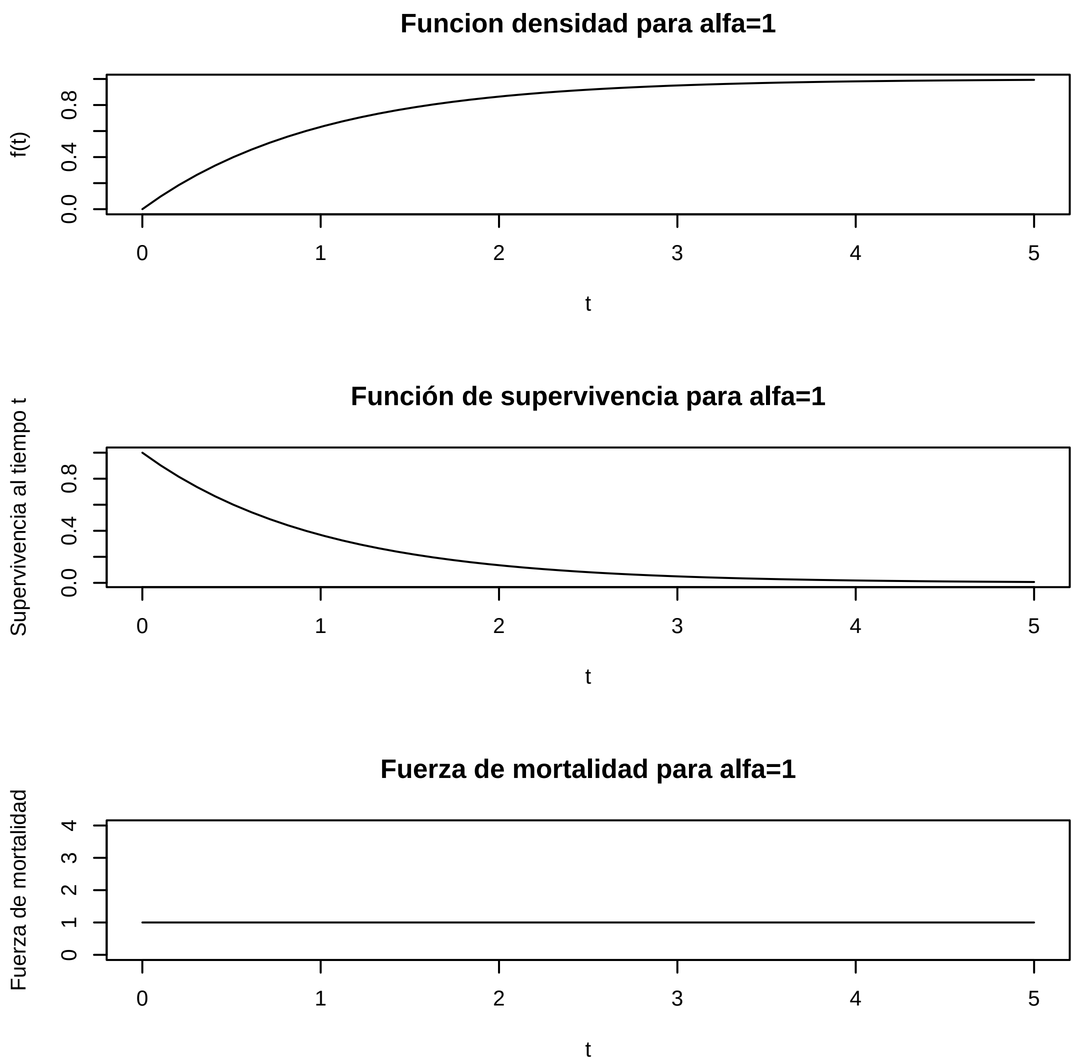
$$h_{x+t} = kn[n(x+t)]^{k-1}$$

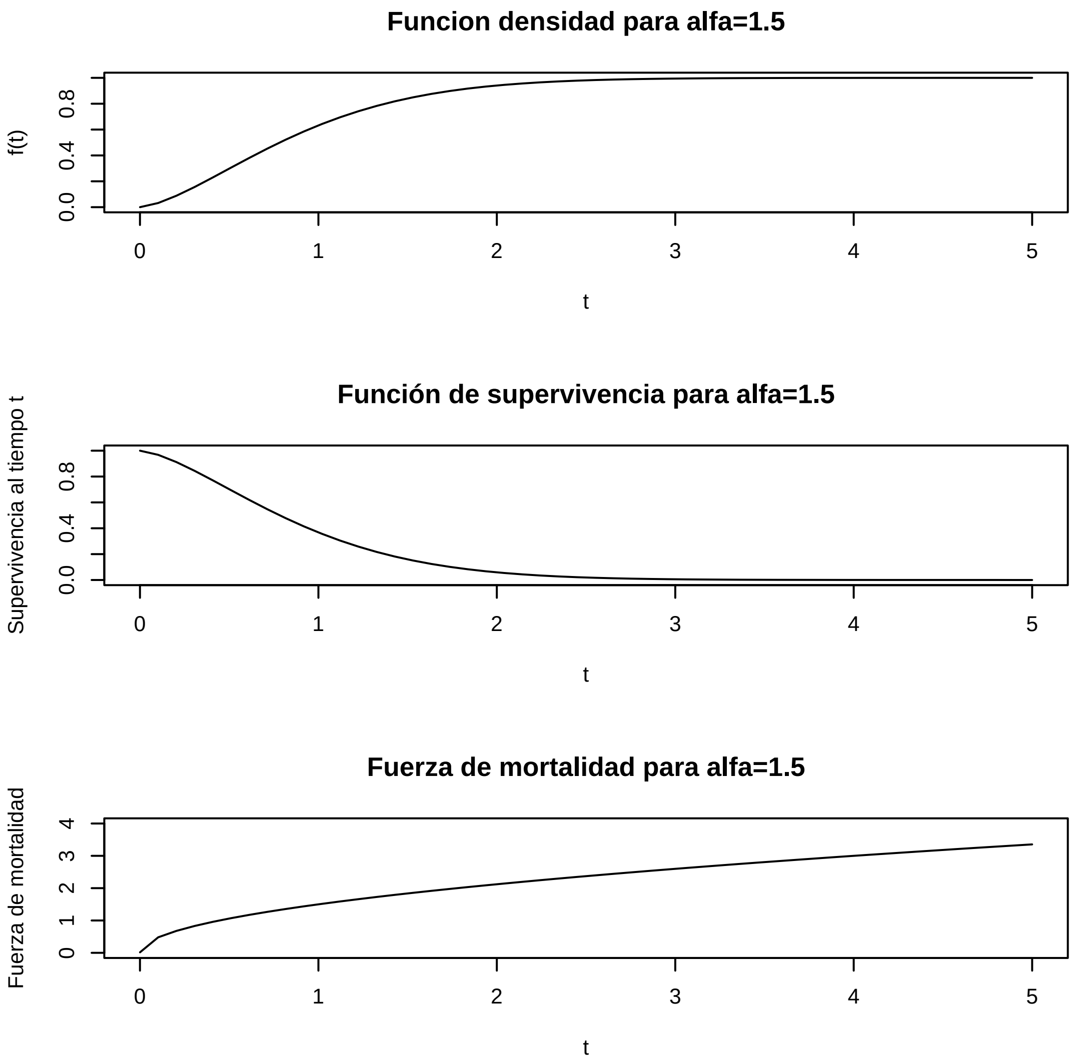
y el parámetro n en el modelo Weibull es aproximadamente inversamente proporcional a la mediana de los tiempos de supervivencia, ya que

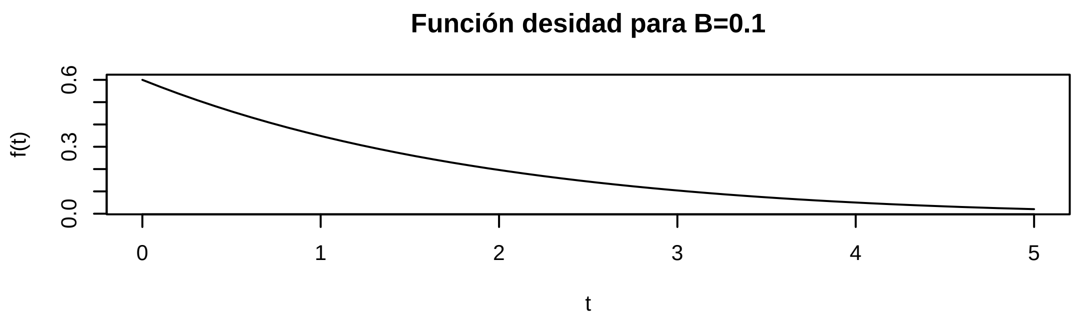
$$\text{mediana de } T = \frac{(\log 2)^{1/k}}{n}$$

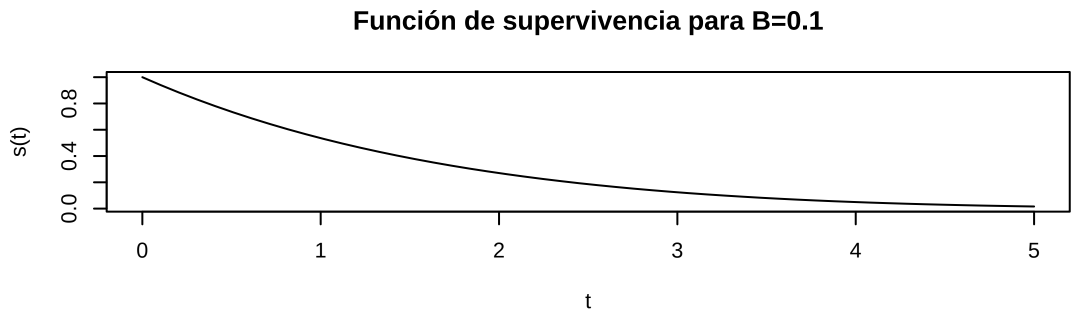
El modelo exponencial para la fuerza de mortalidad se da frecuentemente para modelar los tiempos de vida para las personas.

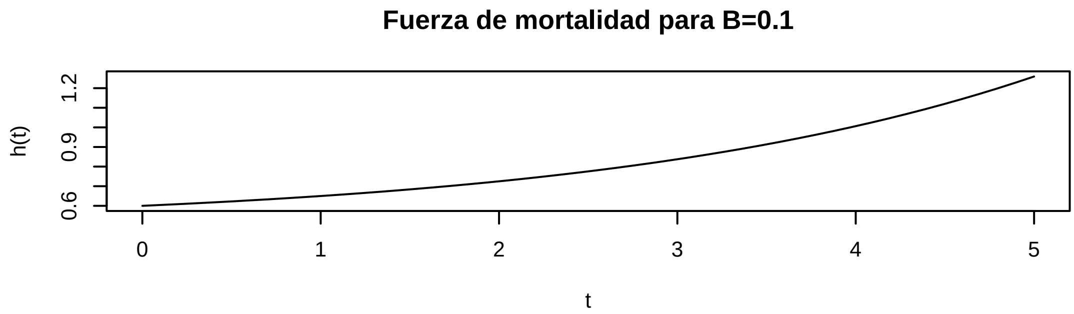

Funcion densidad para alfa=0.5
f(t)
0.0
0.4
0.8
0
1
2
3
4
5
t
Función de supervivencia para alfa=0.5
Supervivencia al tiempo t
0.2
0.6
1.0
0
1
2
3
4
5
t
Fuerza de mortalidad para alfa=0.5
Fuerza de mortalidad
0
1
2
3
4
0
1
2
3
4
5
t

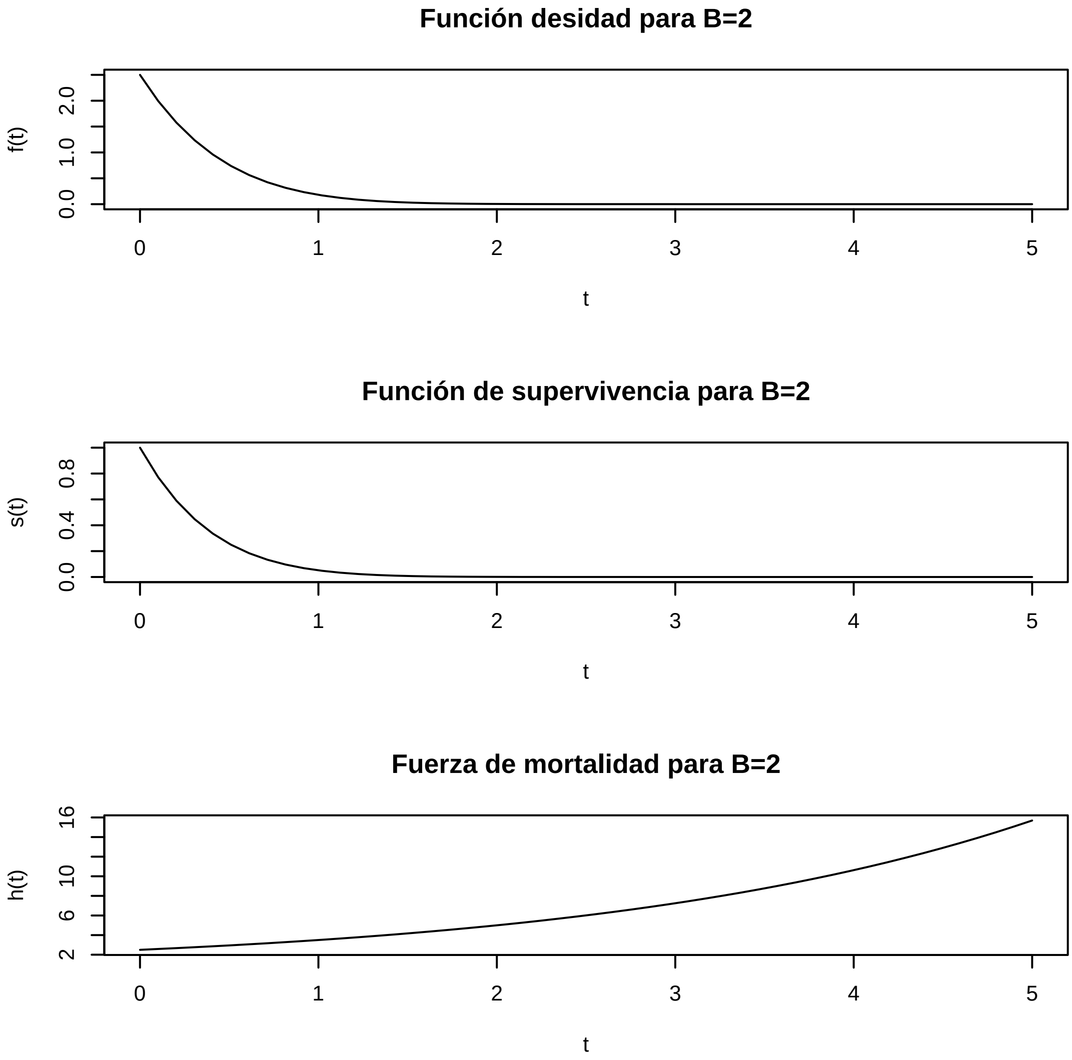

Funcion densidad para alfa=1
f(t)
0.0
0.4
0.8
0
1
2
3
4
5
t
Función de supervivencia para alfa=1
Supervivencia al tiempo t
0.0
0.4
0.8
0
1
2
3
4
5
t
Fuerza de mortalidad para alfa=1
Fuerza de mortalidad
0
1
2
3
4
0
1
2
3
4
5
t

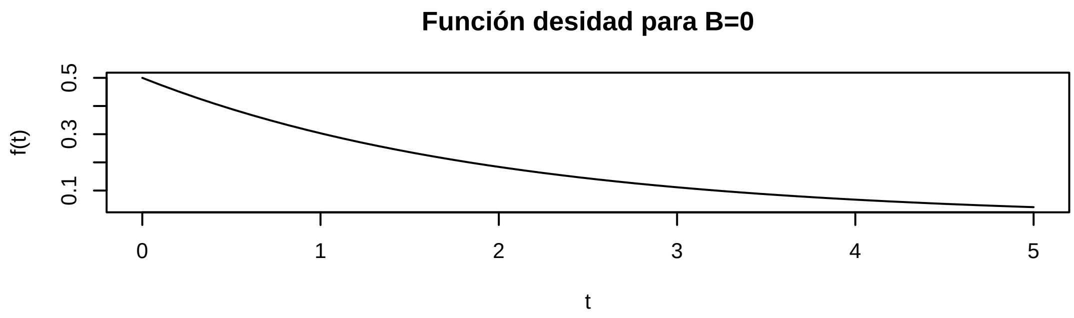

Funcion densidad para alfa=1.5
f(t)
0.0
0.4
0.8
0
1
2
3
4
5
t
Función de supervivencia para alfa=1.5
Supervivencia al tiempo t
0.0
0.4
0.8
0
1
2
3
4
5
t
Fuerza de mortalidad para alfa=1.5
Fuerza de mortalidad
0
1
2
3
4
0
1
2
3
4
5
t

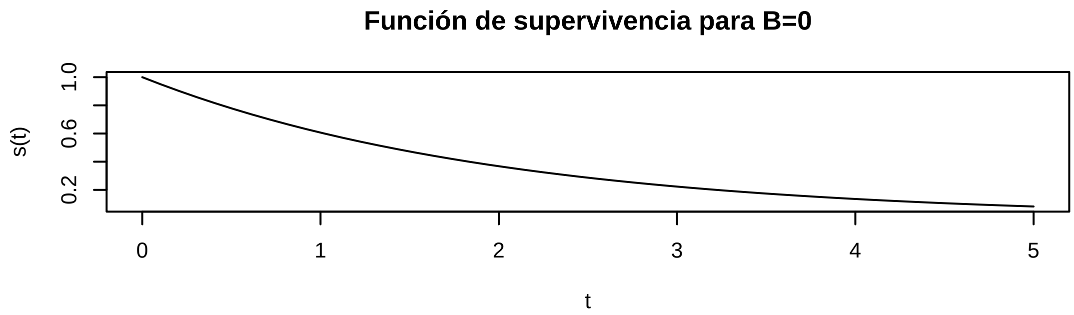

Función desidad para B=0.1
f(t)
0.0
0.3
0.6
0
1
2
3
4
5
t

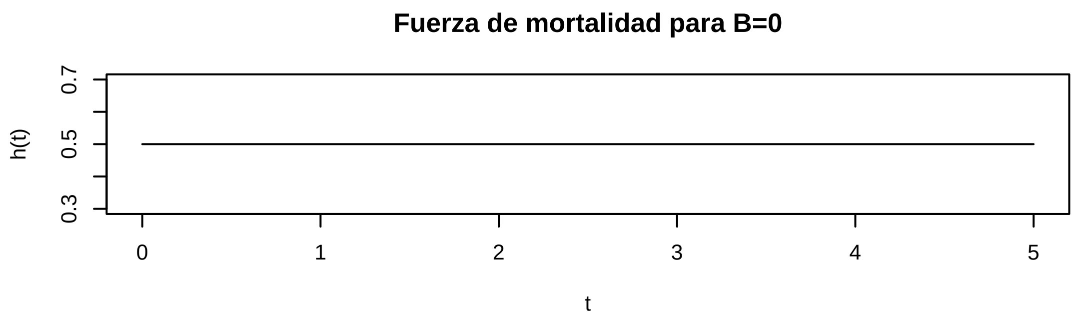

Función de supervivencia para B=0.1
s(t)
0.0
0.4
0.8
0
1
2
3
4
5
t


Fuerza de mortalidad para B=0.1
h(t)
0.6
0.9
1.2
0
1
2
3
4
5
t


Función desidad para B=2
f(t)
0.0
1.0
2.0
0
1
2
3
4
5
t
Función de supervivencia para B=2
s(t)
0.0
0.4
0.8
0
1
2
3
4
5
t
Fuerza de mortalidad para B=2
h(t)
2
6
10
16
0
1
2
3
4
5
t


Función desidad para B=0
f(t)
0.1
0.3
0.5
0
1
2
3
4
5
t


Función de supervivencia para B=0
s(t)
0.2
0.6
1.0
0
1
2
3
4
5
t


Fuerza de mortalidad para B=0
h(t)
0.3
0.5
0.7
0
1
2
3
4
5
t

3.4 El modelo exponencial de mezclas de Larson & Dinse

Tomemos un par de variables aleatorias (D, T), donde D toma valores $1, 2, ..J$ que indica el tipo de pensión que recibirá el individuo y T no negativo representa el momento en que se pensiona el individuo.

Un análisis común caracteriza una distribución de los datos observados en se refiere a la causa específica//

Se asumirá que el numero de pensiones especificas tiene distribución multinomial, con probabilidad de obtener una pensión del tipo j dada por el siguiente modelo

$$P_j(z) = \Pr\{D = j \mid z\} = \frac{\exp\{\mu_j + \pi_j z\}}{\sum_{I=1}^{J} \exp\{\mu_I + \pi_I z\}}$$

donde μ_j es una constante y π_j es el vector columna de K de coeficientes de la regresión

El modelo de supervivencia para el tiempo de falla, dada la falla por el riesgo j de Larson y Dinse es como sigue

$$Q_j(t \mid z) = \Pr\{T > t \mid z, D = j\} = \exp\left\{ - \int_0^t h_j(x) \exp\{\beta_j z\} dx \right\}$$

donde $h_j(x)$ $(z = 0)$ es la función nula de la fuerza de mortalidad para el tipo de falla j y β_j es el vector renglón de los coeficientes de la regresión K, para la función de fuerza de mortalidad usan el modelo exponencial para la función nula.

Análisis de máxima verosimilitud
Supongamos que las funciones de incidencia están dadas por

$$G_j(t) = p_j[1 - S_j(t)]$$

donde

$$S_j(t) = \Pr\{T > t \mid M = j, T < \Delta x\} \quad \text{con} \quad j = 1, ..., J$$

M es la causa de porque se pensiono y $p_j = \Pr\{M > j \mid T < \Delta_x\}$ y $S_j(t)$ es la función de supervivencia propia; es decir $S_j(0) = 1$ y $S_j(\infty) = 0$, J es el número de destinos, para este caso es el tipo de pensión y la función de incidencia $G_j(t) = \Pr\{T < t, M = j\}$.
La probabilidad a sobrevivir todas las causas en el tiempo t es

$$S_T(t) = \Pr\{T > t\} = \sum_{j=1}^{J} p_j S_j(t)$$

Se debe proponer una familia paramétrica para las funciones de supervivencia condicional S_j y algún modelo que permita la inclusión de variables explicativas en alguno de sus parámetros. De igual modo se debe proponer una estructura paramétrica para las probabilidades finales p_j

Sea T el tiempo en que termina de contribuir un individuo, M la causa de terminación, en este caso tipo de pensión, Δx la duración máxima para contribuir a la pensión.

Para el análisis de la fuerza de mortalidad por causa especifica para Larson y Dinse se da como sigue:

$$\begin{aligned}\lambda_j(t \mid z) &= \lim_{\Delta \to 0^+} \Pr\left\{\frac{D = j, t \leq T < t + \Delta \mid z, T \geq t}{\Delta}\right\} \\ &= \lambda_j(t)\exp(\phi_j z)\end{aligned}$$

donde $\lambda_j(t)$ es la función nula de la fuerza de mortalidad asociada con la falla j y el riesgo ϕ_j que es el vector de coeficientes de la regresión K.
Poner lo del libro

Definamos a la fuerza de mortalidad de causa especifica como

$$h_j(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left\{\frac{\Pr\{t \leq T \leq \Delta t + t, M = j \mid T \geq t\}}{\Delta t}\right\}, \tag{3.12}$$

la cual define la probabilidad instantánea de experimentar el evento por causa j en el tiempo t. Nótese que la ecuación (3.12)....

La función de distribución correspondiente a la fuerza de mortalidad de causa específica de la ecuación (3.12) es

$$F_j(t) = \Pr\{T \leq t, M = j\} \qquad j = 1, ...J.$$

Esta función de distribución de causa específica es conocida como la función de incidencia o función de distribución cruda.

$$f_j(t) = h_j(t)S_T(t)$$

por lo que $f_j = h_j(t)S_T(t)$ y recordemos que $S(t) = S_T(t) = \Pr\{T > t\}$ con $T < \Delta x$ La probabilidad de contribuir hasta el tiempo Δx es

$$\Pr\{T \geq \Delta x\}$$

Capítulo 4

Teoria de decremento múltiple

Se verán brevemente algunas distribuciones univariadas para fallas que pueden ser útiles para varios casos, donde la falla no necesariamente es la muerte.

En el contexto de datos de mortalidad, nosotros podemos tener información más allá de los simples hechos de muerte o supervivencia. En particular no solo tomaremos en cuenta el tiempo en que muere, sino también las causas de muerte. Esto sirve para poder clasificar las causas de la muerte. Ahora bien para lo siguiente haremos las siguientes suposiciones.

Cada muerte es por una causa en particular.

Esta suposición es una consecuencia de no saber que es realmente causa de muerte, dado que puede ser por una o más causas a la vez.

Cada individuo dada la población es susceptible a morir de cualquier causa.

Se definirá la tasa de fuerza de mortalidad multivariada con respecto a t_j de $t = (t_1, t_2, ..., t_J)$, como

$$h_j(t_1, t_2, ..., t_J)$$

Tomando la suposición 1 en cuenta, que cada individuo muere de una causa en particular, podemos saber el tiempo en el que muere y está dado por

$$T = \min(T_1, T_2, \ldots, T_J)$$

En conjunto la función de supervivencia es

$$S_T(t) = \Pr\{T < t\}$$

Y la fuerza de mortalidad es

$$h_T(t) = -\frac{1}{S_T(t)}\frac{dS_T(t)}{dt}$$

4.1 Las proporciones de riesgo crudas y netas

Nosotros podemos identificar las causas de muerte. La fuerza de mortalidad a la edad x por causa C_j, en presencia de que todas las causas actúen simultáneamente en la población la fuerza de mortalidad es definida como (ref jhonson y jhonson)

$$h_a = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Pr\left\{(t < T_j < x+h)\bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} k(T_i > t)|\bigcap_{i=1}^{k}(T_i > t)\right\}, \tag{4.1}$$

usando la notación utilizada por nosotros la ecuación (4.1) es igual a (3.12). Notemos que es igual a la fuerza de mortalidad multivariada, evaluándola en el punto $(x, x, ..., x)$ nos da

$$h_j(t) = h_j(t, t, \ldots, t) \tag{4.2}$$

Está es llamada fuerza de mortalidad cruda. Describe la tasa instantánea de morir debido a la causa C_j (en nuestra notación es M) a la edad t cuando

todas las causas actuaron simultáneamente.
Ya que

$$\frac{d\log S_{1,\ldots,J}(t,...,t)}{dt} = \sum_{j=1}^{J} \frac{d\log S_{1,\ldots,J}(t_1,...,t_J)}{dt_j} \, |_{t_i=t} \tag{4.3}$$

esto es

$$h_t = h_1(t) + h_2(t) + \ldots + h_J(t) \tag{4.4}$$

Notemos que la propiedad aditiva de la fuerza de mortalidad cruda (4.4), es consecuencia de la suposición de que cada muerte es por una causa especifica, es decir, que las muertes de las causas diferentes son eventos mutuamente exclusivos.
La fuerza de mortalidad neta se define como sigue

$$\lambda_j(t) = \frac{d\log S_j(t)}{dt}$$

que es la tasa instantánea asociada al tiempo de muerte, con la hipótesis de que muere al tiempo X_j (que en nuestra notación es T_j, esto es a veces afirmado, aunque en general injustificadamente esto representa la tasa instantánea de muerte por causa C_j
En general

$$\lambda_j(t) \neq h_j(t)$$

Definiendo un índice aleatorio

$$M = \begin{cases} j & \text{si } T_j = t \text{ (Si la muerte es por causa } C_j\text{)} \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Donde $Y = \min\{T_1, \ldots, T_J\}$

Si nosotros observamos el par de valores (T, M), entonces el tiempo de muerte y la causa de muerte son identificadas, es habitual llamarle *mínimo identificado*. Si por otro lado T es el único parámetro observado se llama mínimo no identificado. A partir de aquí se deduce la distribución del par aleatorio (T, M)
La probabilidad condicional de morir por causa C_j en el intervalo $(t, t + dt)$ dado que vive hasta la edad t,y en presencia de que todas las causas

afecten a la población simultáneamente, es aproximadamente $h_j(t)dt$. La probabilidad incondicional de que muera de causa C_j en $(t, t+dt)$ está dado por $S_T(t)h_j(t)dt$. Así, la distribución de la probabilidad cruda del tiempo de muerte por causa C_j es

$$Q_j^*(t) = \Pr\{T \leq t, M = j\} = \int_0^t h_j(x)S_T(x)dx \tag{4.5}$$

El símbolo $*$ será usado para denotar la falla o la distribución de supervivencia por causa C_j es estimado en presencia de que todas las causas afecten simultáneamente a la población.

Sea π_j la proporción de muertes esperadas por causa C_j, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \pi_j &= \Pr\{T < \infty, M = j\} = \Pr\{M = j\} \\ &= \int_0^\infty h_j(x)S_T(x)dx = Q_j^*(\infty) \end{aligned}$$

con

$$\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_J = 1$$

La probabilidad cruda de que eventualmente muera de causa C_j a una edad mayor que x es

$$P_j^*(t) = \Pr\{T > t, M = j\} = \int_t^\infty h_j(x)S_T(x)dx$$

Podemos ver que se cumple que:

$$\pi_j = P_j^*(0) = Q_j^*(\infty)$$

también podemos ver que

$$\Pr\{T \leq t\} = F_T(t) = Q_1^*(t) + \ldots + Q_J^*(t) \tag{4.6}$$

y

$$\Pr\{T > t\} = S_T(t) = P_1^*(t) + \ldots + P_J^*(t) \tag{4.7}$$

notemos que

$$\Pr\{T \leq t\} + \Pr\{\{T > t\} = F_T(t) + S_T(t) = 1$$

pero

$$Q_j^*(t) + P_j^*(t) \leq 1 \tag{4.8}$$

La probabilidad cruda de $Q_j^*(t)$ y $P_j^*(t)$

$$\begin{aligned}
S_j^*(t) &= \Pr\{\text{edad de muerte} > t|\text{la muerte por causa}C_j\} \\
&= \Pr\{T > t|M = j\} = \frac{P_j^*(t)}{P_j^*(0)} = \frac{1}{\pi_j}P_j^*(t) \\
&= \frac{1}{\pi_j}\int_t^\infty h_j(x)S_T(x)dx
\end{aligned}$$

Esto es

$$F_j^*(t) = 1 - S_j^*(t)$$

que representa la distribución actual del tiempo de muerte entre aquellos que se mueren de la causa C_j en la presencia de todas las causas.
La función distribución correspondiente es entonces

$$f_j^*(t) = \frac{1}{\pi_j}h_j(t)S_T(t) = -\frac{1}{\pi_j}\frac{dP_j^*(t)}{dt} \tag{4.9}$$

entonces

$$h_j(t) = -\frac{1}{S_T(t)}\frac{dP_j^*(t)}{dt} \tag{4.10}$$

Por otro lado, la fuerza de mortalidad de la distribución $S_j^*(t)$ es

$$\begin{aligned}
\lambda_j^* &= -\frac{d\log S_j^*(t)}{dt} = \frac{f_j^*}{S_j^*} = \frac{h_j(t)S_T(t)}{\int_t^\infty h_j(t)S_T(t)dt} && (4.11) \\
&= -\frac{1}{P_j^*(t)} \cdot \frac{dP_j^*(t)}{dt} && (4.12)
\end{aligned}$$

comparando (4.10) y (4.12),se ve que

$$\frac{h_j(t)}{\lambda_j^*(t)} = \frac{P_j^*(t)}{S_T(t)} = \pi_j(t) \tag{4.13}$$

Sustutuyendo $S_T(t)$ de (4.7) en (4.10), se obtiene

$$h_j(t) = -\frac{dP_j^*\backslash dt}{\sum_{i=1}^J P_i^*(t)} \tag{4.14}$$

Más allá, teniendo en cuenta las relaciones (4.9) y (4.12) se puede expresar $h_j(t)$ en términos de $S_j^*(t)$ y $\lambda_j^*(t)$ como sigue

$$h_j(t) = -\frac{\pi_j \lambda_j^*(t) S_j^*(t)}{\sum_{i=1}^J \pi_i S_i^*(t)} \tag{4.15}$$

4.1.1 Caso donde $T_1, \ldots, T_J$ son independientes

Supongamos que tenemos la situación donde $T_1, \ldots, T_J$ son mutuamente independientes. En este caso, la función distribución de supervivencia es de la forma

$$S_{1,\ldots,J}(x_1, \ldots, x_J) = S_1(x_1) \cdots S_J(x_J) \tag{4.16}$$

donde $S_j(x_j)$ es la función distribución de supervivencia marginal con respecto a X_j, y la fuerza de mortalidad neta es $\lambda_j(t) = -\frac{d \log S_j(t)}{dt}$
Notemos que es este caso si se pude dar la igualdad

$$\lambda_j(t) = h_j(t) \qquad j = 1, ...J. \tag{4.17}$$

donde $h_j(t)$ es la fuerza de mortalidad cruda definida en (4.1).

Capítulo 5

Aplicaciones

Para modelar éste problema necesito definir las siguientes variables que me ayudaran a describirlo.

X_1; Tiempo en el que muere antes de llegar a la jubilación

X_2; Tiempo en el que se pensiona por enfermedad o accidente (antes de llegar a la jubilación)

X_3; Tiempo en el que se pensiona por años de servicio (jubilación)

X_4; Tiempo en el que se pensiona por edad (jubilación)

T_1; Tiempo durante el cual el trabajador hace aportaciones para su pensión

T_2; $\text{mín}(X_1, X_2, X_3, X_4)$

{}

La variable T_2 es una función que depende de 4 variables tomando el valor de aquella que suceda primero. Pero para analizar el problema de las pensiones necesito abordar otro problema que son los tiempos de supervivencia para el cual necesito definir las siguientes variables.

Cabe señalar que Y_2 ocurre cuando el beneficiario primario o principal fallece.

Y_1; Tiempo de vida durante el cual el beneficiario primario o principal recibe la pensión

Y_2; Tiempo de vida durante el cual el beneficiario secundario recibe la pensión

T_3; Tiempo durante el cual el beneficiario principal recibe su pensión

T_4; Tiempo durante el cual el beneficiario secundario recibe la Pensión

Las variables anteriores podrían explicarse con la siguiente función. La función de supervivencia es importante para este trabajo para definir la edad aproximada de supervivencia de una persona y esta dada por:

$$\Pr\{T > t\} \quad \text{donde} \quad t \geq 0$$

Es la probabilidad de que la persona muera a los $t + c$ años con $c \geq 0$

Después se tomara un muestreo de un cierto tipo de trabajo (por decir doctores) y se calculara T_1 y T_2.

T_1 se calcula por medio de la función de fuerza de mortalidad la cual esta dada por

$$h(t) = -\frac{d}{dt}\{\log S(t)\}$$

donde se calcula la probabilidad de que una persona se pensione al tiempo t y podemos saber en que tiempo ellos empiezan hacer aportaciones(Z) por lo que se puede calcular T_1 por medio de la sustracción t-Z T_2 se calcula por medio de la función de supervivencia la cual estará dada por $Pr\{Z < T_2 \leqslant t\} = S(t) - S(Z)$. A partir de los datos ya obtenidos se puede decir que edad es la apropiada para que una persona que es doctor se pensione o cuanto es lo que tiene que a portar para que no se quede sin fondos durante su retiro. Esto es por que si sabemos cuanto tiempo aporximado tiene de vida despues de pensionado podemos calcular cuanto dinero se le dará a estas personas para que ni el sistema de pensiones de mas de lo que aporto o de menos de lo que esta persona aporto. Si ha esta cantidad de dinero se le calcula la tasainteres que genera inflacion se pueden tomar medidas respecto a el tiempo y tipo de aportaciones, por lo que se propone un modelo que segrege a los trabajos por el tipo de riesgo que estos tienen y asi obtener el tipo y tiempo adecuado para estos trabajos.