2do Parcial

Modelos de Supervivencia

1. El modelo de riesgos proporcionales mas simple permite comparar dos grupos con respecto a sus tiempos de supervivencia. La variable auxiliar x se usa para identificar a cual de los dos grupos pertenece el individuo:

$$x = \begin{cases} 0 & \text{si el individuo pertenece al Grupo 1} \\ 1 & \text{si el individuo pertenece al Grupo 2.} \end{cases}$$

   De esta forma $h_x(y) = h_0(y)e^{\beta x}$, el cual se puede expresar en términos del parámetro β.

   (a) Encuentre expresiones para las fuerzas de mortalidad $h_1(y)$ y $h_2(y)$ para los dos grupos. Si las funciones de supervivencia son $S_1(y)$ y $S_2(y)$, demuestre que

$$S_2(y) = S_1(y)^{\exp \beta}.$$

   (b) Demuestre que, bajo el modelo de riesgos proporcionales, la prueba de la hipótesis nula $H_0 : \beta = 0$ es equivalente a probar la igualdad de las funciones de supervivencia de los dos grupos. Proponga un procedimiento para probar dicha hipótesis.

2. Demuestre que si el modelo de riesgos proporcionales y el modelo de tiempos acelerados coinciden, entonces los tiempos de supervivencia tienen una distribución Weibull. Esto es, demuestre que si

$$S_0(y)^{g_1(x)} = S_0[yg_2(x)],$$

   entonces

$$S_0(y) = \exp\left\{-\left(\frac{y}{b}\right)^a\right\}$$

   para valores específicos de a y b.

3. Supóngase que se desea comparar los tiempos de supervivencia de dos grupos. El grupo 0, indicado con $x = x_0 = 0$, el cual corresponde al grupo de control, tiene fuerza de mortalidad $h_0(z)$, y tiene una función de supervivencia

$$S_0(z) = \exp\left\{-\frac{z}{\lambda}\right\}.$$

El grupo 1, indicado con $x = x_1 = 1$, el cual corresponde a un nuevo tratamiento, tiene fuerza de mortalidad $h_1(z)$, y tiene una función de supervivencia

$$S_1(z) = \exp\left\{-\frac{\psi z}{\lambda}\right\}.$$

(a) Encuentre expresiones para $h_0(z)$ y $h_1(z)$ en términos de λ y ψ.

(b) Demuestre que los dos grupos siguen el modelo de riesgos proporcionales

$$h_i(z) = \exp\{\beta x_i\} h_0(z) \qquad \text{para} \qquad i = 0, 1$$

cuando $\psi = e^{\beta}$.

(c) Dados datos observados del Grupo 0

$$(z_{i0}, \delta_{i0}), \quad i = 1, 2, ...n_0,$$

y datos observados del Grupo 1

$$(z_{i1}, \delta_{i1}), \quad i = 1, 2, ...n_1,$$

donde $\delta_{ij} = 0$ si z_{ij} tiene censura por la derecha y tiene valor 1 de otra forma, demuestre que la función log-verosimilitud del problema de dos muestras es

$$l(\psi, \lambda) = -(r_0 + r_1)\log\lambda + r_1 \log\psi - \frac{1}{\lambda}(T_0 + \psi T_1),$$

donde $r_i = \sum_{j=1}^{n_i} \delta_{ji}$, $i = 0, 1$, es el número total de observaciones sin censura en el Grupo i, y $T_i = \sum_{j=1}^{n_i} z_{ji}$, $i = 0, 1$, es la suma total de los tiempos de supervivencia observados en el Grupo i.

(d) Demuestre que los estimadores de máxima verosimilitud de λ y ψ están dados por

$$\hat{\lambda} = \frac{T_0}{r_0} \qquad \text{y} \qquad \hat{\psi} = \frac{r_1 T_0}{r_0 T_1}.$$

(e) Desarrole un análisis de residuales para determinar si las suposiciones del modelo son adecuadas.

4. El archivo adjunto `capacitor.txt` contiene ciclos de vida de capacitores sujetos a tres tipos de voltaje. Los datos se describen como:

   `dias` los ciclos de vida registrados en dias

   `evento` indicador del estátus (0=censura, 1=evento)

   `voltaje` el voltaje que se usò durante la prueba.

   (a) Haga un análisis exploratorio para determinar si hay indicios de alguna diferencia de los ciclos de vida de acuerdo a los tipos de voltaje. Use las curvas adecuadas para proponer un modelo adecuado para su ajuste.

   (b) Ajuste los datos usando un método completamente paramétrico y la regresión semiparamétrica de Cox. Compare los coeficientes de ambas especificaciones e interprete sus resultados.

   (c) Determine si existen diferencias significativas entre los ciclos de vida sujetos a los varios voltajes.

   (d) Desarrolle los diagnósticos adecuados para determinar si el ajuste es adecuado.